Ejercicio 1A del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2021 (Análisis)

Sea la función continua $f : R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(e^x + x^3)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 4x^2 + a & \text{si } 0 \le x < 1 \\ b + \text{sen}(\pi x) & \text{si } 1 \le x \end{cases}$ (ln denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b.

Solución

La regla de L'Hôpital (L'H) dice: Si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a-δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. (La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞).

Como la función es continua en R; en particular en continua en x = 0 y x = 1.

Como f(x) es continua en x = 0 tenemos $f(0) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)$

$f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (4x^2 + a) = 0 + a = a.$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} = \left\{ \frac{\ln(e^0 + 0)}{0} = \frac{0}{0}; \text{L'H} \right\} = \lim_{x\to 0-} \frac{\dfrac{e^x + 3x^2}{(e^x + x^3)}}{1} = \lim_{x\to 0-} \frac{e^x + 3x^2}{(e^x + x^3)} = \frac{e^0 + 0}{e^0 + 0} = \frac{1}{1} = 1.$$

De $f(0) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)$, tenemos **a = 1**.

Como f(x) es continua en x = 1 tenemos $f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x)$

$f(1) = \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (b + \text{sen}(\pi x)) = b + \text{sen}(\pi) = b + 0 = b.$ $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (4x^2 + 1) = 4 + 1 = 5.$

De $f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x)$, tenemos **b = 5**.

Ejercicio 2A del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2021 (Análisis)

Sea $f : R \to R$ la función definida por $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. (1'25 puntos)

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. (1'25 puntos)

Solución

Sea $f : R \to R$ la función definida por $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

a)

Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

La recta x = a es una asíntota vertical de f(x) si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Como la función f(x) no se anula en el denominador, **f(x) no tiene asíntotas verticales.**

La recta y = b es una asíntota horizontal en ∞ si $\lim_{x\to\infty-} f(x) = b$.

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \left\{ \dfrac{e^{+\infty} - 1}{e^{+\infty} + 1} = \dfrac{+\infty}{+\infty}; \text{L'H} \right\} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2\cdot e^{2x}}{2\cdot e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} (1) = 1$, **la recta y = 1 es una asíntota horizontal de f(x) en +∞. Como tiene asíntota horizontal en +∞ <u>no tiene asíntota oblicua</u> en +∞.**

Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} + 1} = \dfrac{\dfrac{1}{e^{+\infty}} - 1}{\dfrac{1}{e^{+\infty}} + 1} = \dfrac{0 - 1}{0 + 1} = \dfrac{-1}{1} = -1$, **la recta y = -1 es una asíntota horizontal de f(x) en -∞. Como tiene asíntota horizontal en -∞ <u>no tiene asíntota oblicua</u> en -∞.**

b)

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. (1'25 puntos)

Estudiamos la monotonía de f(x) que es el estudio de su 1ª derivada f '(x).

Tenemos $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, y su derivada es $f'(x) = \frac{2\cdot e^{2x}}{2\cdot e^{2x}} = 1 > 0$, **luego f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en todo R.**

Ejercicio 3A del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2021 (Análisis)

Calcula $\int_0^{\pi/2}(2sen^2(x) - cos^2(x))dx$.

Solución

Calculamos primero la integral indefinida teniendo en cuenta que $sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}$ y también la formula fundamental de la trigonometría $cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$.

$$\int(2sen^2(x) - cos^2(x))dx = \int(2sen^2(x) - (1 - sen^2(x)))dx = \int(3sen^2(x) - 1)dx = \int\left(3\cdot\left(\frac{1 - cos(2x)}{2}\right) - 1\right)dx=$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(x - \frac{sen(2x)}{2}\right) - x + K = \frac{3x}{2} - \frac{3\cdot sen(2x)}{4} - x + K$$

Luego $\int_0^{\pi/2}(2sen^2(x) - cos^2(x))dx = \left[\frac{3x}{2} - \frac{3\cdot sen(2x)}{4} - x\right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3\cdot sen(\pi)}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - (0)$ $\mathbf{= \pi/4.}$

Ejercicio 4A del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2021 (Análisis)

Considera las funciones f, g : R $\rightarrow$ R definidas por $f(x) = |x| - 2$ y por $g(x) = 4 - x^2$.
a) Halla los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que delimitan. (1 punto)
b) Determina el área del recinto anterior. (1'5 puntos)

Solución

Considera las funciones f, g : R $\rightarrow$ R definidas por $f(x) = |x| - 2$ y por $g(x) = 4 - x^2$.
a)
Halla los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que delimitan.

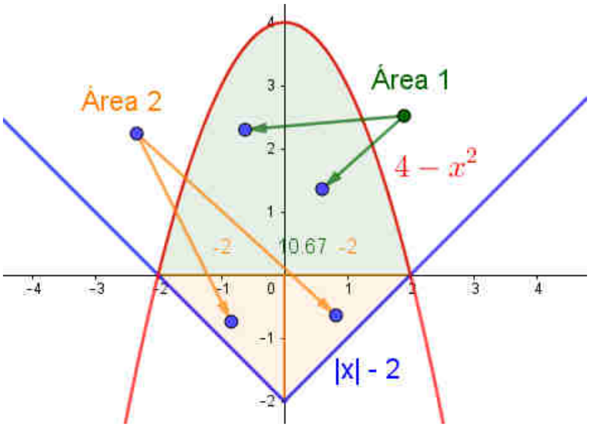
Tenemos $f(x) = |x| - 2 = \begin{cases} -x - 2 & si \quad x < 0 \\ x - 2 & si \quad x \ge 0 \end{cases}$, teniendo en cuenta la definición de $|x| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \ge 0 \end{cases}$. Tanto $-x - 2$ como $x - 2$ son semirrectas y ambas pasan por (0, -2).

La parábola $g(x) = 4 - x^2$ es de la forma $(\cap)$, pues el número que multiplica a x^2 es negativo, con abscisa del vértice en la solución de $f'(x) = 0 = -2x$, de donde $x = 0$ y el vértice es V(0, 4). Corta al eje OX en $x = -2$ y $x = 2$ (soluciones de $4 - x^2 = 0$).

Cortes entre ellas:

Si $x < 0$, de $-x - 2 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$, de donde $x = -2$ (valida) y $x = 3$ (no valida). Se cortan en (-2, 0)

Si $x < 0$, de $+x - 2 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$, de donde $x = 2$ (valida) y $x = -3$ (no valida). Se cortan en (2, 0)
Un esbozo es:



b)
Determina el área del recinto anterior.
Área = Área1 + Área2 = Área bajo $(4 - x^2)$ entre -2 y 2 más área triángulo rectángulo base 4 y altura 2 =

$$= \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx + (1/2)\cdot 4\cdot 2 = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} + 4 = \mathbf{(8 - 8/3) - (- 8 - (-8/3)) + 4\ u^2 = (20 - 16/3)\ u2 \cong 14'66667\ u^2.}$$

Ejercicio 5B del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2021 (Álgebra)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Estudia, según los valores de λ, el rango de la matriz $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden tres. (1'75 puntos)

b) Resuelve el sistema $(A - I)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y halla, si existe, una solución en la que x = 2. (0'75 puntos)

Solución

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a)
Estudia, según los valores de λ, el rango de la matriz $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

Tenemos $(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$.

Luego $|A - \lambda I| = 0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna}\end{matrix}$ $= (2- \lambda)\cdot((2-\lambda)(4-\lambda) - 1) - (-1)\cdot(0-2) =$

$= (2- \lambda)\cdot(\lambda^2 - 6\lambda+ 7) - 2 = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 14 - 2 = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12.$

De $|A - \lambda I| = 0$ tenemos $-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0$.
Por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 8 & -19 & 12 \\ 1 & & -1 & 7 & -12 \\ \hline & -1 & 7 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

Luego $-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 7\lambda - 12)$, y tenemos $\lambda = 1$ y $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \rightarrow$
$\lambda = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \dfrac{7 \pm 1}{2}$ de donde $\lambda = 3$ y $\lambda = 4$.

Si $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq 4$ tenemos $|A - \lambda I| \neq 0$ y rango$(A - \lambda I) = 3$.

Si $\lambda = 1$, tenemos $(A - I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, **rango(A - I) = 2.**

Si $\lambda = 3$, tenemos $(A - 3\cdot I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, **rango(A - 3·I) = 2.**

Si $\lambda = 4$, tenemos $(A - 4\cdot I) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 \neq 0$, **rango(A – 4·I) = 2.**

b)

Resuelve el sistema $(A - I)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y halla, si existe, una solución en la que x = 2)

Tenemos $(A - I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ con rango 2, luego de $(A - I)\cdot X = O$ resulta $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir el sistema $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$.

Como el rango es 2, sólo necesitamos dos ecuaciones (1ª y 3ª) $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$, de donde tomando $z=m\in R$, resulta x = -2m e y = -3m **y la solución del sistema es (x, y, z) = (-2m, -3m, m) con m $\in$ R.**

Piden si x = 2 = -2m, de donde m = -1 y la solución sería (x, y, z) = (-2(-1), -3(-1), (-1)) **= (2, 3, -1).**

Ejercicio 6B del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2021 (Álgebra)

Considera la matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ m & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula m para que A·B no tenga inversa. (1 punto)
b) Estudia el rango de la matriz B·A según los valores de m. (1’5 puntos)

Solución

Considera la matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ m & -1 \end{pmatrix}$.

a)
Calcula m para que A·B no tenga inversa.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m+1 & 2m \end{pmatrix}.$$

A·B no tiene inversa si |A·B| = 0.

Como $|A\cdot B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m+1 & 2m \end{vmatrix} = 2m + m + 1 = 3m + 1 = 0$ si m = -1/3, **para m = -1/3 A·B no tiene inversa**.

b)
Estudia el rango de la matriz B·A según los valores de m.

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ m & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & m-1 & 1 \\ 2 & 2m & 2 \\ m-1 & -2m & -1 \end{pmatrix}$$

Como $|B\cdot A| = \begin{vmatrix} 2 & m-1 & 1 \\ 2 & 2m & 2 \\ m-1 & -2m & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-2F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & m-1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ m+1 & -m-1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera columna $= 1\cdot(2m + 2 - 2m – 2) = 0$, **luego rango(B·A)<3 sea cual sea el valor de m**.

En B·A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$, **rango(B·A) = 2 siempre.**

Ejercicio 7B del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2021 (Geometría)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$.

a) Halla el plano que contiene a r y es paralelo a s. (1’5 puntos)
b) Deduce razonadamente que ningún plano perpendicular a s contiene a r. (1 punto)

Solución

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$.

a)
Halla el plano que contiene a r y es paralelo a s.

Un punto de “r” es A(2, -1, 3), y un vector director es **u** = (3, 2, 1).
En “s”, un punto B lo podemos obtener tomando z = 0, con lo cual y = 4 y de 2x - 4 - 2 = 0, tenemos x = 3 y un punto es B(3, 4, 0), y un vector director es $\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= \mathbf{i}(-2-0) - \mathbf{j}(4-0) + \mathbf{k}(2-0) = (-2, -4, 2)$.

Como el plano π contiene a “r” tomo de “r” un punto, el A(2, -1, 3), y un vector, el **u =** (3, 2, 1). Como el plano π es paralelo a la recta “s” tomo de “s” el otro vector independiente, el **v** = (-2, -4, 2).
La ecuación general del plano pedida es det(**AX, u, v**) = 0, siendo X(x, y, z) un punto genérico del plano.

$\pi \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 = \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= (x-2)(4+4) - (y+1)(6+2) + (z-3)(-12+4) =$

= 8x - 8y - 8z = 0 = x - y - z = 0.

b)
Deduce razonadamente que ningún plano perpendicular a s contiene a r.

Si un plano π’ es perpendicular a “s” su vector normal es proporcional a **v** = (-2, -4, 2). Si π’ contuviese a “r” los vectores serían perpendiculares, es decir **u•v** = 0, **pero u•v** = (3, 2, 1)•(-2, -4, 2) = -6 - 8 + 2 **= -12 ≠ 0, por tanto ningún plano perpendicular a s contiene a r**.

Ejercicio 8B del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2021 (Geometría)

Considera los puntos A(1, 2, 3), B(-2, 4, -3) y C(-10, 1, 0).
a) Halla el área del triángulo de vértices A, B y C. (1’25 puntos)
b) Halla el plano que equidista de A y B. (1’25 puntos)

Solución

Considera los puntos A(1, 2, 3), B(-2, 4, -3) y C(-10, 1, 0).
a)
Halla el área del triángulo de vértices A, B y C.

Sabemos que el área de un triángulo es 1/2 del área del paralelogramo que determinan sus vectores **AB** = = (-3, 2, -6) y **AC** = (-11, -1, -3), es decir 1/2 módulo (|| ||) del producto vectorial (x) de dichos vectores.

$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -6 \\ -11 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= \mathbf{i}(-6-6) - \mathbf{j}(9-66) + \mathbf{k}(3+22) = (-12, 57, 25)$.

Área triángulo = (1/2)·||**AB**x**AC**|| **= (1/2)·$\sqrt{(12^2 + 57^2 + 25^2)}$ = (1/2)·$\sqrt{(4018)}$ u^2** ≅ **31’6938 u^2**.

b)
Halla el plano que equidista de A y B.

El plano π que equidista de A y B, es el plano mediador del segmento AB, es decir el plano perpendicular al segmento AB en su punto medio M.

Punto medio M((1 - 2)/2, (2 + 4)/2, (3 - 3)/2) = M(-1/2, 3, 0), y vector normal el **n** = **AB** = (-3, 2, -6).

El plano es el conjunto de puntos X tales que **MX•n** = 0, donde “•” es el producto escalar, es decir:
π ≡ **MX•n** = 0 = (x + 1/2, y - 3, z)•(-3, 2, -6) **= -3x + 2y - 6z - 15/2 = 0 = 6x - 4y + 12z + 15 = 0**.